

Physique du solide - Examen 20 Janvier 2014

Cet examen est composé de trois parties totalement indépendantes. La première partie est centrée sur l'étude de la structure et des bandes d'énergie de l'aluminium. La deuxième partie concerne le paramagnétisme de Brioullin. La troisième partie s'attache à étudier une jonction PN. Les documents de cours et de TD sont autorisés.

1 Propriétés électroniques de l'aluminium

Aluminium : réseau direct ; réseau réciproque

L'aluminium cristallise dans une structure cubique faces centrées. On notera a le côté du cube.

1. Dessiner la structure cubique face centrée
2. Donner une maille primitive ainsi que le volume de la dite maille.
3. Pour des raisons de simplicité (notamment pour certains calculs), l'aluminium est souvent décrit à l'aide d'une structure incluant un motif à 4 atomes. Donner la maille, son volume, ainsi que la position des atomes dans le motif.
4. Donner une définition de l'espace réciproque
5. En partant de la description de l'espace réel faisant intervenir le motif à 4 atomes, donner une base de l'espace réciproque.

Diffraction X

On considère un cristal d'aluminium éclairé par un rayonnement X incident caractérisé par une onde plane monochromatique, de vecteur d'onde \vec{q} et d'amplitude $A_{\vec{q}}$. Le facteur de diffusion atomique f_{Al} sera considéré indépendant de la direction, et $A_{\vec{q}'} = f_{Al} A_{\vec{q}}$ où $A_{\vec{q}'}$ est l'amplitude de l'onde diffusée par un ion suivant le vecteur d'onde \vec{q}' . Dans la suite on considèrera que la diffusion est élastique de sorte que la diffraction par le cristal se ramène à l'étude de l'interférence entre les ondes planes monochromatiques diffusées par les différents atomes de la structure cristalline. **On prendra la description de l'espace réel faisant intervenir le motif à 4 atomes.**

6. Soient deux atomes situés en O et P, interagissant avec l'onde incidente de vecteur d'onde \vec{q} et émettant chacun une onde de vecteur d'onde \vec{q}' . Montrer que la différence de phase entre les deux ondes diffusées est $\vec{OP} \cdot \vec{K}$, où $\vec{K} = \vec{q}' - \vec{q}$.
7. Déterminer l'amplitude totale diffractée par le cristal suivant un vecteur d'onde \vec{q}' .

8. Déterminer l'intensité totale diffractée par le cristal suivant un vecteur d'onde \vec{q}' . Montrer que les maximums de l'intensité diffractée sont obtenus lorsque \vec{K} est un vecteur du réseau réciproque. \vec{K} a comme coordonnées dans l'espace réciproque (l_1, l_2, l_3) . Déterminer les valeurs de (l_1, l_2, l_3) pour lesquelles l'intensité diffractée est maximum.

Structure de bandes de l'aluminium - modèle des électrons libres

L'aluminium est un métal. La suite de l'exercice est consacrée au calcul de la structure de bande de l'aluminium dans le cadre du modèle des électrons libres.

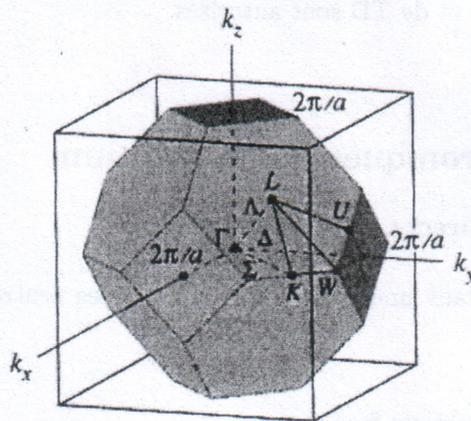


FIGURE 1 - Première zone de Brillouin d'un réseau CFC.

On cherche à étudier l'état fondamental de N électrons dans un cristal d'Aluminium de volume V . Nous travaillerons dans le cadre de l'approximation des électrons indépendants qui permet de réduire le calcul à celui pour un électron confiné dans le volume V . Les niveaux sont ensuite remplis avec les $N-1$ autres électrons en tenant compte du principe de Pauli. L'hamiltonien à un électron est noté $H = \frac{\vec{p}^2}{2m_e} + V(\vec{r})$ où m_e est la masse de l'électron et $V(\vec{r})$ est le potentiel effectif vu par l'électron dû aux ions et aux autres électrons.

9. Dans le cadre du modèle des électrons libres, quelle est la forme et la valeur prise par $V(\vec{r})$?
10. Rappeler la forme générale du théorème de Bloch. En déduire la forme des fonctions d'ondes dans le cadre du modèle des électrons libres.
11. Déterminer la relation de dispersion $E(\vec{k})$.

Structure de bande de l'aluminium dans la direction $[1\ 1\ 1]$

L'aluminium cristallise dans une structure cubique faces centrées. Le réseau réciproque est alors un cubique centré de constante $4\pi/a$. La figure 1 représente la première zone de Brillouin sur laquelle les points de haute symétrie sont indiqués. En particulier, les points Γ et L ont les coordonnées suivantes dans la base $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$: $\Gamma (0, 0, 0)$; $L (\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a})$.

12. Quelles valeurs prend le vecteur \vec{k} selon le chemin $\Gamma \rightarrow L$?

13. Calculer la relation de dispersion pour les vecteurs du réseau réciproque $\vec{K} = (0, 0, 0)$; $(\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a})$ et $(\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}, -\frac{2\pi}{a})$ selon le chemin $\Gamma \rightarrow L$.
14. Tracer la relation de dispersion selon le chemin $\Gamma \rightarrow L$

2 Paramagnétisme de Brillouin

On considère un système constitué de N atomes (ou ions) fixés aux noeuds d'un réseau cristallin de volume V, en équilibre avec un thermostat à la température T. On va étudier le magnétisme électronique de ce système.

Les atomes sont tous dans leur état fondamental et possèdent un moment cinétique total $\vec{J} \neq \vec{0}$ (\vec{J} est la somme des moments cinétiques orbitaux et de spin des divers électrons de l'atome). Par exemple, pour les atomes Cr^{3+} , Fe^{3+} et Gd^{3+} $J=3/2, 5/2, 7/2$ respectivement. A un tel moment cinétique est associé un moment magnétique $\vec{\mu} = -g\mu_B \vec{J}$, où g est le facteur de Landé, μ_B est le magnéton de Bohr : $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_0}$.

On fait l'hypothèse que les atomes sont suffisamment éloignés les uns des autres pour que les interactions entre moments magnétiques soient négligeables, les N atomes sont donc considérés comme indépendants les uns des autres.

On applique un champ magnétique extérieur $\vec{B} = B\vec{e}_z$.

Données :

- $\hbar = 1,056 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}^{-1}$, constante de Planck.
 $m_0 = 9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, masse de l'électron.
 $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J.T}^{-1} = 5,8 \cdot 10^{-5} \text{ eV.T}^{-1}$, magnéton de Bohr.
 $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.T}^{-1}$, constante de Boltzmann. *1,38 10⁻²³ J.K⁻¹*
 $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ SI}$, perméabilité magnétique du vide.

$$\sum_{j=0}^n c.r^{j-1} = c \frac{1-r^n}{1-r}$$

Lorsque $x \ll 1$, $\coth(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \dots$

1. Ecrire l'hamiltonien d'interaction des ces N atomes avec le champ magnétique.
2. Calculer la fonction de partition z du système électronique d'un atome.
3. Calculer la fonction de partition Z du système de N atomes indépendants.
4. On considère que l'aimantation est suivant \vec{e}_z : $\vec{M} = M\vec{e}_z$
 - (a) Rappeler la définition de l'aimantation M et l'exprimer en fonction de la fonction de partition Z.
 - (b) Calculer l'aimantation M en fonction de N/V, g, μ_B , J, et $k_B T$. On utilisera la fonction de Brillouin d'ordre J : $B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth(\frac{2J+1}{2J}x) - \frac{1}{2J} \coth(\frac{x}{2J})$.
5. (a) Pour T fixée, représenter M en fonction de B, pour $J = 1/2, 7/2$. En particulier, donner la valeur de l'aimantation à saturation.
 - (b) Expliquer dans quelles conditions expérimentales (ordres de grandeur de B et T) on doit se placer pour observer la saturation de l'aimantaion.
6. (a) Donner l'expression de M à température ambiante en fonction de N/V, g, μ_B et $k_B T$.

On supposera qu'à température ambiante, on se trouve dans le régime de saturation des donneurs et accepteurs (c'est-à-dire que les donneurs et accepteurs sont tous ionisés).

Remarque : Dans cet exercice, on ne se contentera pas de donner les expressions littérales, on prendra soin de faire les applications numériques pour chaque question. Dans tout l'exercice, on est à température ambiante.

1. Calculer la densité de porteurs intrinsèques n_i à partir des données ci-dessus.
2. La plaquette est dopée, sur toute son épaisseur, de manière uniforme avec de l'antimoine (élément de la colonne V) dans la proportion d'un atome d'antimoine pour 5.10^5 atomes de Silicium.
 - (a) Calculer les densités d'électrons et de trous : n_n et p_n respectivement.
 - (b) Calculer la résistivité ρ_n de la plaquette.
3. La plaquette précédente est dopée une deuxième fois sur une profondeur de $20 \mu\text{m}$ avec de l'Indium (élément de la colonne III) dans la proportion d'un atome d'Indium pour 4.10^5 atomes de Silicium.
 - (a) Calculer les densités d'électrons et de trous dans la portion de plaquette dopée deux fois : n_p et p_p respectivement.
 - (b) Calculer la résistivité ρ_p de cette portion de plaquette.
4. A partir de cette plaquette, on réalise des diodes de section $S = 10^4 \mu\text{m}^2$.
 - (a) Tracer la caractéristique $I(V)$ de ces diodes et calculer leur tension de diffusion V_d .
 - (b) Une de ces diodes est polarisée dans le sens direct par une tension constante de 1.5V . Calculer le courant qui traverse la diode (on tiendra compte des résistances de la partie dopée n et de la partie dopée p).
